



**KJ-1355**

**B.Sc. (Part - III)**  
Term End Examination, 2020

**MATHEMATICS**

Paper - II

Abstract Algebra

*Time* : Three Hours]      [*Maximum Marks* : 50

**नोट** : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों के उत्तर दीजिए।  
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**Note** : Answer any **two** parts from each question. All  
questions carry equal marks.

**इकाई / Unit-I**

1. (a) यदि  $G$  एक परिमित आबेली समूह है, तो सिद्ध कीजिए कि  $G$  प्रत्यक्ष गुणनिक के साथ सायलो उपसमूहों का तुल्याकारीता है।

154\_JDB\_★\_(7)

(Turn Over)

( 2 )

If  $G$  be a finite abelian group, then prove that  $G$  is isomorphism of sylow subgroups with direct product.

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह का केन्द्र प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Prove that centre of any group is a normal subgroup.

(c) अन-आबेली समूहों के लिए कौशी प्रमेय को लिखकर हल कीजिए।

State and prove Cauchy theorem for non abelian group.

### इकाई / Unit-II

2. (a) वलय के लिए समाकारिता के मूलभूत प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem on Homomorphism of rings.

(b) यदि  $S$  वलय  $R$  की गुणजावली है, तो  $R/S$ ,  $R$  का समाकारी प्रतिबिम्ब है, सिद्ध कीजिए।

(3)

If  $S$  is any ideal of ring  $R$ , then prove that  $R/S$  is a isomorphic image of  $R$ .

- (c) किसी वलय के प्रतिरूपक को परिभाषित कीजिए। आइंस्टीन के सूत्र की मदद से बहुपद  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  की खण्डनीयता की जांच कीजिए।

Define module of a ring with the help of Einstein formula check the reducibility of the following polynomial  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .

### इकाई / Unit-III

3. (a) सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि  $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$  जहां  $W_1$  एवं  $W_2$ ,  $V(F)$  की दो उपसमष्टियाँ हैं।

Define vector space. Show that  $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$  where  $W_1$  and  $W_2$  are two subspaces of  $V(F)$ .

(4)

- (b) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित जनित सदिश समष्टि का परिमित आधार होता है।

Prove that every finitely generated vector space has a finite basis.

- (c) यदि  $V(F)$  एक परिमित विमीय सदिश समष्टि हो, तब  $V(F)$  के कोई दो आधार समान संख्या में अवयवों को रखते हैं।

If  $V(F)$  is a finite dimensional vector space, then two basis of  $V(F)$  having the same number of elements.

#### इकाई / Unit-IV

4. (a) शून्य समष्टि को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि यदि दो सदिश समष्टियाँ  $U(F)$  और  $V(F)$  के बीच रैखिक रूपान्तरण  $T$  हो, तो शून्य समष्टि,  $U(F)$  की उपसमष्टि होती है।

Define null space of linear transformation and show that if  $T$  is a linear transformation from  $U(F)$  to  $V(F)$ , then the null space of  $T$  is a subspace of  $U(F)$ .

(5)

(b) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है।

Prove that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

is diagonalizable.

(c) सदिश समष्टि  $V_3(R)$  के लिए आधार समुच्चय  $\mathcal{B} = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$  का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए।

Find the dual basis of the basis set  $\mathcal{B} = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$  for  $V_3(R)$ .

(6)

इकाई / Unit-V

5. (a) यदि  $\alpha, \beta$  एक आंतर गुणन समष्टि  $V$  के सदिश हैं, तो सिद्ध कीजिए कि  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$  ज्यामितीय व्याख्या भी कीजिए।

If  $\alpha, \beta$  are vectors in an inner product space  $V$ , then prove that  $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$ . Give the Geometrical interpretation also.

- (b) सिद्ध कीजिए कि एक आंतर गुणन समष्टि में सदिशों का प्रसामान्य लाम्बिक समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

In an inner product space prove that any orthonormal set vectors is linearly independent.

- (c) ग्राम-शिमट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके  $V_3(R)$  के आधार  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 2, -2), (2, -1, 1)\}$  से एक प्रसामान्य एवं लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए।

(7)

Applying the Gram-Schmidt Orthogonalization process obtain an orthonormal basis from the basis

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 2, -2), (2, -1, 1)\}.$$

---